

Арифметические операции в позиционных системах счисления.

Сложение

Рассмотрим основные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Правила выполнения этих операций в десятичной системе хорошо известны — это сложение, вычитание, умножение столбиком и деление углом. Эти правила применимы и ко всем другим позиционным системам счисления.

Сложение в двоичной системе

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Сложение в восьмеричной системе

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Сложение в шестнадцатеричной системе

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

При сложении цифры суммируются по разрядам, и если при этом возникает избыток, то он переносится влево.

Пример 1. Сложим числа 15 и 6 в различных системах счисления.

Десятичная: $15_{10} + 6_{10}$

Двоичная: $1111_2 + 110_2$

Восьмеричная: $17_8 + 6_8$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 15 \\ + 6 \\ \hline 21 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 5+6=11=10+1 \\ | 1+1=2 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ + 1111 \\ + 0110 \\ \hline 10101 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 1+0=1 \\ | 1+1=2=2+0 \\ | 1+1+1=3=2+1 \\ | 1+1=2=2+0 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 17 \\ + 6 \\ \hline 25 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 7+6=13=8+5 \\ | 1+1=2 \end{array}$

Шестнадцатеричная: $F_{16} + 6_{16}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + F \\ + 6 \\ \hline 15 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 15+6=21=16+5 \end{array}$

Вычитание

При вычитании цифры вычитаются по разрядам, и если при этом возникает недостаток, то происходит заем в старших разрядах.

Пример. Вычтем единицу из чисел 10_2 , 10_8 и 10_{16}

Двоичная: $10_2 - 1_2$

Восьмеричная: $10_8 - 1_8$

Шестнадцатеричная: $10_{16} - 1_{16}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 10 \\ - 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 2-1=1 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 10 \\ - 1 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 8-1=7 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 1 \\ - 10 \\ - 1 \\ \hline F \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 16-1=15=F_{16} \end{array}$

Пример. Вычтем число $59,75$ из числа $201,25$.

Десятичная: $201,25_{10} - 59,75_{10}$

Двоичная: $11001001,01_2 - 111011,11_2$

$$\begin{array}{r} 11 \\ - 201,25 \\ - 59,75 \\ \hline 141,50 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 5-5=0 \\ | 10+2-7-5 \\ | 10-9=1 \\ | 9-5=4 \\ | 2-1=1 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ - 11001001,01 \\ - 00111011,11 \\ \hline 10001101,10 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 1-0=1 \\ | 0-0=0 \\ | 1-1=0 \\ | 1-1=0 \\ | 2-1=1 \\ | 1-1=0 \\ | 1-0=1 \end{array}$

Восьмеричная: $311,2_8 - 73,6_8$

Шестнадцатеричная: $C9,4_{16} - 3B,C_{16}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ - 311,2 \\ - 73,6 \\ \hline 215,4 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 8+2-6=4 \\ | 8-3=5 \\ | 8-7=1 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ - C9,4 \\ - 3B,C \\ \hline 8D,8 \\ \hline \end{array}$$

$\begin{array}{l} | 16+4-12=8 \\ | 16+8-11=13=D_{16} \\ | 12-1-3=8 \end{array}$

Ответ: $201,25_{10} - 59,75_{10} = 141,5_{10} = 10001101,1_2 = 215,4_8 = 8D,8_{16}$.

Умножение

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения.

Умножение в двоичной системе

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Умножение в восьмеричной системе

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Ввиду чрезвычайной простоты таблицы умножения в двоичной системе, умножение сводится лишь к сдвигам множимого и сложениям.

Пример. Перемножим числа 5 и 6.

Десятичная: $5_{10} \cdot 6_{10}$

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

Двоичная: $101_2 \cdot 110_2$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 110 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array}$$

Восьмеричная: $5_8 \cdot 6_8$

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ответ: $5 \cdot 6 = 30_{10} = 11110_2 = 36_8$.

Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду:

$$11110_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30;$$

$$36_8 = 3 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 30.$$

Деление

Деление в любой позиционной системе счисления производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе. В двоичной системе деление выполняется особенно просто, ведь очередная цифра частного может быть только нулем или единицей.

Пример 1. Разделим число 30 на число 6.

Десятичная: $30_{10} : 6_{10}$ Двоичная: $11110_2 : 110_2$ Восьмеричная: $36_8 : 6_8$

$$\begin{array}{r} - \quad 30 \mid 6 \\ \quad 30 \mid 5 \\ \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \quad 11110 \mid 110 \\ \quad 110 \mid 101 \\ \hline \quad \quad 110 \\ \quad \quad 110 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \quad 36 \mid 6 \\ \quad 36 \mid 5 \\ \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

Ответ: $30 : 6 = 5_{10} = 101_2 = 5_8$.

Пример 2. Разделим число 5865 на число 115.

Десятичная: $5865_{10} : 115_{10}$ Двоичная: $1011011101001_2 : 1110011_2$

$$\begin{array}{r} - \quad 5865 \mid 115 \\ \quad 575 \mid 51 \\ \hline \quad \quad 115 \\ \quad \quad 115 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \quad 1011011101001 \mid 1110011 \\ \quad 1110011 \mid 110011 \\ \hline \quad \quad 1000100 \\ \quad \quad 1110011 \\ \hline \quad \quad \quad 10101100 \\ \quad \quad \quad 1110011 \\ \hline \quad \quad \quad \quad 1110011 \\ \quad \quad \quad \quad 1110011 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Восьмеричная: $133518 : 1638$

$$\begin{array}{r} - \quad 13351 \mid 163 \\ \quad 1262 \mid 63 \\ \hline \quad \quad 531 \\ \quad \quad 531 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Ответ: $5865 : 115 = 51_{10} = 110011_2 = 63_8$.

Проверка. Преобразуем полученные частные к десятичному виду:

$$110011_2 = 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = 51; \quad 63_8 = 6 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = 51.$$